# TD : A propos de quelques conjectures

Olivier Raynaud (raynaud@isima.fr)

**Résumé**

Ce TD concerne l'étude de conjectures ou de propriétés de la théorie des nombres, leurs liens avec le périmètre des fonctions récursives et les démarches algorithmiques à mettre en oeuvre pour les vérifier.

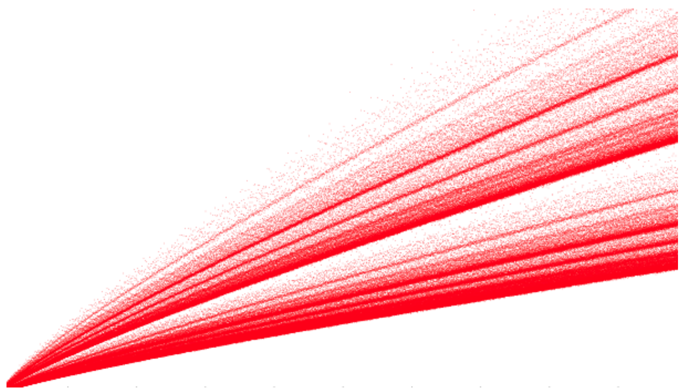

FIGURE 1 – La comète de Goldbach est le graphe du nombre de façons d'écrire un entier n pair comme somme de deux nombres premiers (ici, $4 \leq n \leq 1000000$). https ://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture de Goldbach

**Exercice 1.** *Considérons les deux conjectures suivantes :*

**Conjecture 1** (GoldBach)**.** *Tout nombre pair supérieur à 2 peut être représenté comme la somme de deux nombres premiers.*

**Conjecture 2** (La Tortue)**.** *Tout nombre pair peut être représenté comme la différence de deux nombres premiers.*

**Définition 1.** *Nous dirons d'un nombre n qu'il dispose de la propriété de Goldbach s'il peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers. De même nous dirons qu'il a la propriété de La Tortue s'il peut s'écrire comme la différence de deux nombres premiers.*

**Question 1.** *Vérifier les conjectures 1 et 2 sur des exemples simples.*

*Considérons les deux problèmes de décisions suivants*

**Problème 1.** *GoldBach*
**Instance :** *$p$ un entier pair.*
**Question :** *$p$ possède-t-il la propriété de GoldBach.*

**Problème 2.** *La Tortue*
**Instance :** *$p$ un entier pair.*
**Question :** *$p$ possède-t-il la propriété de La Tortue.*

**Question 2.** *Ecrire les algorithmes qui répondent à ces problèmes de décisions.*

**Question 3.** *Ces deux problèmes de décision sont-ils de même difficulté ?*

**Question 4.** *Dire si les fonctions sous-jacentes à ces algorithmes sont récursive primitive, récursive partielle ou récursive générale. En déduire la décidabilité du problème correspondant.*

*Soit la propriété suivante :*

**Propriété 1.** *Soient $p$ et $p'$ deux nombres premiers consécutifs, la suite des nombres $p' - p$ est strictement croissante à partir d'un certain rang.*

**Question 5.** *Si la propriété précédente était vrai, quelle conclusion faire quant à la difficulté du problème de La Tortue ?*

**Question 6.** *Supposons qu'il existe un algorithme qui décide l'arrêt d'un algorithme pour une donnée d'entrée fixée. Montrer qu'il serait alors possible de décider de la véracité ou non de la conjecture de Goldbach.*

**Exercice 2** (La conjecture de Syracuse)**.**
*Considérons la propriété suivante :*

**Propriété 2.** *Soit un entier $n$, nous dirons que $n$ dispose de la propriété de Syracuse si la suite des nombres (notée $\mathcal{S}_n$) obtenue par les règles suivantes converge en $1$ :*
- *Si $n$ est pair alors $n$ est divisé par deux ;*
- *Si $n$ est impair alors $n$ est multiplié par trois et on ajoute un.*

**Définition 2** (Imagée)**.** *Soit $n$ un entier, nous appelons $Vol$ la suite de nombre $\mathcal{S}_n$, Altitude maximale la plus grande valeur du vol, le $Temps$ de vol le nombre $|\mathcal{S}_n|$ et le $Temps$ de vol en altitude le nombre de points consécutifs de $\mathcal{S}_n$ supérieurs à la valeur de $n$.*

**Question 1.** *Décrire les vols obtenus à partir des entiers* 10*,* 14 *et* 27*.*

**Question 2.** *Quelles sont les différentes configurations possibles de $Vol$ pour un $n$ donné ?*

**Question 3.** *Existe-t-il des instances pour obtenir des vols aussi longs que l'on veut ? Si oui quelles sont ces instances ?*

**Problème 3.** *Syracuse*
**Instance :** *$p$ un entier.*
**Question :** *$p$ possède-t-il la propriété de Syracuse.*

**Question 4.** *Ecrire un algorithme qui répond au problème de décision 3.*

**Question 5.** *Classer la fonction sous jacente à votre algorithme. Le problème 3 est-il décidable ?*

**Conjecture 3.** *Pour tout entier $n$, la suite $\mathcal{S}_n$ converge en* 1*.*

*A ce jour personne n'a pu démontrer ce résultat. Pourtant grâce à des procédés algorithmiques efficaces et la rapidité de calculs des ordinateurs nous savons aujourd'hui que tout les entiers inférieurs à $3.2 * 10^{16}$ vérifient la propriété de Syracuse.*

**Question 6.** *Sur ce principe de force brute consistant à vérifier la conjecture pour tous les entiers dans l'ordre croissant, proposer quelques idées pour accélérer le processus de vérification qu'un nombre est Syracusien.*

**Exercice 3** (Pour aller plus loin).

*La plupart des propriétés "naturelles" des entiers admettent bien des tests dont le temps d'aboutissement est prévisible comme la primalité, le carré, savoir si un nombre est parfait ou s'il est une puissance de 2.*

**Question 7.** *Existe-t-il des tests sur des propriétés arithmétiques dont l'aboutissement est assuré mais dont on ne peut prévoir la durée d'aboutissement ?*